## 7. Finite-Size Scaling Approach to the Kinetic Ising Model

東大・理　　高　野　宏

Suzuki[1)]によって導出された動的臨界現象に対する有限サイズ・スケーリング則を用いて，2次元キネティック・イジング模型の動的臨界指数を評価した。

2次元のキネティック・イジング模型では，時刻 t においてイジング・スピンの配置が$\{\sigma\}$である確率分布を$P(\{\sigma\};t)$とすると，この$P(t)$の時間発展は

$$\partial_t P(t) = \Gamma P(t) \tag{1}$$

という方程式に従う。時間発展演算子$\Gamma$は,

$$\Gamma = -\sum_j (1-F_j) W_j(\{\sigma\}) \tag{2}$$

という形をしているとする。ここで$F_j$は格子点$j$にあるイジング・スピン$\sigma_j$を反転させる演算子である。$W_j(\{\sigma\})$は，$\sigma_j$が反転した状態へ移る遷移確率で， detailed balanceの条件

$$W_j(\{\sigma\}) P_{st}(\{\sigma\}) = F_j W_j(\{\sigma\}) P(\{\sigma\}) \tag{3}$$

を満たすようにとる。ここで$P_{st}(\{\sigma\})$は平衡状態の分布関数である。

我々は，いろいろな量の緩和時間の臨界点近傍での異常性に興味がある。例えば，磁化$M=\sum_j \sigma_j$とエネルギー$E=\sum_{\langle ij\rangle} \sigma_i \sigma_j$の緩和時間は，それぞれ

$$\tau_M = \int_0^\infty dt \frac{<\delta M(t)\, \delta M(0)>}{<\delta M(0)\, \delta M(0)>} , \tag{4}$$

$$\tau_E = \int_0^\infty dt \frac{<\delta E(t)\, \delta E(0)>}{<\delta E(0)\, \delta E(0)>} \tag{5}$$

で与えられる。ただし,

$$\delta A = A - <A> \tag{6}$$

は平衡値

$$<A> = \mathrm{Tr}_{\{\sigma\}}\, A(\{\sigma\}) P_{st}(\{\sigma\}) \tag{7}$$

からのずれを表わし,

$$<A(t)\,A(0)> = \mathrm{Tr}_{\{\sigma\}}\ A\,\mathrm{e}^{\Gamma t}\,P_{\mathrm{st}}\,A \tag{8}$$

は平衡での相関々数である。$\tau_{\mathrm{M}}$，$\tau_{\mathrm{E}}$ は臨界点 $T_{\mathrm{c}}$ の近傍で

$$\tau_{\mathrm{M}} \sim \varepsilon^{-\Delta_{\mathrm{M}}} \quad , \tag{9}$$

$$\tau_{\mathrm{E}} \sim \varepsilon^{-\Delta_{\mathrm{E}}} \tag{10}$$

のような異常性を示すと考えられる。ここで $\varepsilon \sim |\frac{T}{T_{\mathrm{c}}}-1|$ は $T_{\mathrm{c}}$ からのずれである。

一辺の長さが $n$ であるような有限な系を考える。有限サイズ・スケーリング則[1)]によれば，$n$ が十分大きいところで，

$$\tau_{\mathrm{M}}(\varepsilon,\,n) \sim n^{z_{\mathrm{M}}}\,\hat{\tau}_{\mathrm{M}}(\varepsilon n^{1/\nu}) \ , \tag{11}$$

$$\tau_{\mathrm{E}}(\varepsilon,\,n) \sim n^{z_{\mathrm{E}}}\,\hat{\tau}_{\mathrm{E}}(\varepsilon n^{1/\nu}) \tag{12}$$

という振舞いが予想される。ここで $\nu$ は相関距離の臨界指数である（$\xi \sim \varepsilon^{-\nu}$）。式(11)と(12)より，$\Delta_{\mathrm{M}} = \nu z_{\mathrm{M}}$，$\Delta_{\mathrm{E}} = \nu z_{\mathrm{E}}$ であることがわかる。$\varepsilon = 0$ とおけば，式(11),(12)は

$$\tau_{\mathrm{M}}(n) \sim n^{z_{\mathrm{M}}} \quad , \tag{13}$$

$$\tau_{\mathrm{E}}(n) \sim n^{z_{\mathrm{E}}} \tag{14}$$

となる。

有限サイズの系で，$\tau_{\mathrm{M}}$，$\tau_{\mathrm{E}}$ 等を計算し(11)～(14)式にあてはめることにより，$z_{\mathrm{M}}$，$z_{\mathrm{E}}$ の評価を行なうことができる。2次元のキネティック・イジング模型に対するこのような計算が既にいくつか報告されている[2)～5)]。しかし，$n$ の小さなところ（$n=2,3,4$）を用いた計算[3),4)]では $z_{\mathrm{M}}$ の値が用いる遷移確率 $W_i(\{\sigma\})$ の形によって非常に異なることが指摘されている[4)]。$z$ の値は遷移確率のとり方によらずユニバーサルであると考えられるから，この結果は，$n$ の小さいところでは，有限サイズ・スケーリング則(11)～(14)がまだ成り立っていないためであると考えられる。大きな値の $n$（$n=5 \sim 15$）を用いた計算[2),5)]では $\tau_{\mathrm{M}}$，$\tau_{\mathrm{E}}$ の値の誤差が大きく，$z_{\mathrm{M}}$，$z_{\mathrm{E}}$ の精度があまり良くない。

ここでは，次のことを調べるために計算を行なった。

1. 遷移確率の形が異なっても，$n$ の大きいところでは有限サイズ・スケーリング則が同じように成り立つか？
2. そして，遷移確率が異なっても，$z_{\mathrm{M}}$，$z_{\mathrm{E}}$ の値がユニバーサルであるか？

3. $z_M$, $z_E$ の値を $n$ の大きいところで評価する。

4. $z_M = z_E$ か？

用いた方法は，YalabikとGunton[2]の方法とほぼ同じである。(4)式で定義された $\tau_M(n)$ のかわりに，時間発展演算子 $\Gamma$ ((2)式) の負の固有値のうち，$<\delta M(t)\ \delta M(0)>$ の長時間での緩和を記述する固有値 $\lambda_M(n)$ を用いた。$|\lambda_M(n)|^{-1}$ は $n\to\infty$ では $\tau_M$ と同様の異常性を示すと考えられる。即ち，臨界温度 ($\varepsilon = 0$) では，有限サイズ・スケーリング則

$$|\lambda_M(n)|^{-1} \sim n^{z_M} \tag{15}$$

が成り立つと予想される。同様に，$\tau_E(n)$ のかわりに $<\delta E(t)\ \delta E(0)>$ の長時間での緩和を記述する固有値 $\lambda_E(n)$ を用いた。これに対しても，有限サイズ・スケーリング則 ($\varepsilon = 0$ での)

$$|\lambda_E(n)|^{-1} \sim n^{z_E} \tag{16}$$

が成り立つと考えられる。$\lambda_M(n)$，$\lambda_E(n)$ を臨界温度で $n = 2 \sim 16$ に対して計算した。$n = 2, 3$ に対しては時間発展演算子 $\Gamma$ を直接対角化して固有値 $\lambda_M(n)$，$\lambda_E(n)$ を求めた。$n = 4 \sim 16$ に対しては，モンテ・カルロ法で$<M(t)\,M(0)>$，$<\delta E(t)\ \delta E(0)>$を求め，それらの長時間での振舞いから $\lambda_M(n)$，$\lambda_E(n)$ を評価した。2種類の異なる遷移確率に対して同様の計算を行なった。

その結果，次のことがわかった。

1. 有限サイズ・スケーリング則(15),(16)は，遷移確率の形が異なっても，$n$ の大きいところで同じように成立する。
2. 有限サイズ・スケーリング則(15),(16)が成り立ちはじめる $n$ の値は，遷移確率の形によって異なる。
3. $n$ の大きいところで評価した $z_M$，$z_E$ の値は，計算の精度の範囲内で，遷移確率の形によらずユニバーサルである。
4. さらに，計算の精度の範囲内で，$z_M = z_E$ である。
5. 得られた値は，$z_M = z_E \simeq 2.2 \pm 0.1$ である。

この $z \simeq 2.2 \pm 0.1$ という値は，最近のくりこみ群とモンテ・カルロ法を組み合わせた方法による結果 $z \simeq 2.22 \pm 0.13$ [6] とよく一致している。また我々の実空間繰り込み群を用いた計算の結果 $z \simeq 2.23$ [7] ともよく一致している。

参 考 文 献

1) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **58** (1977), 1142.
2) M. C. Yalabik and J. D. Gunton, Prog. Theor. Phys. **62** (1979), 1573.
3) M. P. Nightingale and H. W. J. Blöte, Physica **104A** (1980), 352.
4) R. Pandit, C. Forgacs and P. Rujan, preprint.
5) J. C. Angles d'Auriac, R. Maynard and R. Rammal, preprint.
6) J. Tobochnik, S. Sarker and R. Cordery, Phys. Rev. Lett. **46** (1981), 1417.
7) H. Takano and M. Suzuki, submitted to Prog. Theor. Phys.

## 8. Fluctuation-induced first-order transitions and symmetry-breaking fields

東北大・工　　山 崎 義 武

前回の研究会で米谷さんから「物性の分野では一次相転移について，くりこみ群の方法でどのように研究しているのでしょうか？」という問が出され，丁度，前々から「不安定な固定点は物理的にどういう意味をもつのか？」について調べておりましたところ一次相転移に関係することが分ってきました。「素粒子と物性の分野の研究者間のより深き理解と発展」のために物性の一次相転移に関係することが分ってきました。「素粒子と物性の分野の研究者間のより深き理解と発展」のために物性の一次相転移に関するレビューと臨界点近傍のcrossoverの振舞について報告します。

第１章くりこみ群の scheme　$\mathcal{H}_R = R\mathcal{H}_b$ ($\mathcal{H}_R$と$\mathcal{H}_b$ は系の renormalized とbare Hamiltonian density; $R$ はくりこみ演算子）の理解の仕方：1. 1.不安定な固定点，1. 2.一次相転移の条件，1. 3.例。第２章臨界点近傍の crossover の振舞。以上の各内容を以下に要約する。

そもそも物質の一次相転移をひき起す系としては次の二つの場合が考えられる。第１の場合はLandau理論で元々一次相転移に相当するHamiltonian系がそのまゝ一次相転移を持続する系，第２の場合はLandau理論で二次相転移が予想されるHamiltonian系であるにも拘らず一次相転移が出現する系，である。今回は第２の場合を考える。

第１章1. 1.の要約：Landau理論で二次相転移を示すと予想される体系は沢山ある。強磁性的な系では，例えば，(i) isotropic spin 系，(ii) anisotropic cubic spin 系，(iii) quenched-random spin 系，等がある。二次相転移の出現は安定な固定点の存在と関係する。このことは